METHODUS FIGURARUM LINEIS RECTIS & CURVIS COMPREHENSARUM QUADRATURAS DETERMINANDI.

Authore JOHANNE CRAIGE.

LONDINI:

Impensis *Mosis Pitt*, ad insigne Angeli in Cœmeterio D. *Paulo*, MDCLXXXV.

HONORABILI VIRO

DOMINO

ROBERTO DAWES,

BARONETTO

ANGLO,

TRACTATUM HUNC,

Benevolentiæ & Obſervantiæ ergo,

D. C. Q.

JOHANNES CRAIGE.

Methodus Figurarum, &c.

Optimè nuper obſervârunt Geometræ quaſdam eſſe Figuras indefinitæ Quadraturæ capaces, quæ tum quoad totas, tum quoad ſingulas partes, ſunt Quadrabiles; Alias vero eſſe, quæ, licet hujuſmodi Quadraturam indefinitam non admittant, aliquam tamen habent portionem quadrabilem; imò tota figura nonnunquam Quadrari poteſt, cum quælibet ejus pars non poſſit. Nec credibile eſt ex alio fonte eorum errorem ortum eſſe, qui Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam figurarum Quadraturas impoſſibiles exiſtimârunt, quàm quia hanc figurarum diſtinctionem non conſiderârunt. Methodis enim utentes quæ ſupponunt figuras eſſe indefinitè Quadrabiles, cum aliquam Quadrandam aſſumerent, quæ eorum Methodos recuſabat, ſtatim illius Quadraturam impoſſibilem eſſe crediderunt; cum exinde amplius non eſſet concludendum, quam Methodos quibus uſi ſunt eſſe imperfectas, & ad omnes figuras non extendere. Sed cum inſtitutum meum non ſit aliorum errores detegere, aſt quid in hâc materiâ excogitavi

paucis exponere; Methodum hic tradam (non ex Arithmeticis ſed Geometricis principiis deductam) quæ figurarum utriuſque generis quadraturas determinabit. Prioris generis Geometricas, poſterioris verò Algebraicas quadraturas per ſeries infinitas exhibebit. Et, quia Methodus quæ ſpeciales talium figurarum quadraturas determinet, à nemine hactenus vulgata eſt, ſperamus præclarum illum Germanum (qui publicè eam promiſit, & omninò in poteſtate ſua eſſe aſſeruit, in Actis Eruditorum Lipſiæ publicatis) ſuam brevi in lucem emiſſurum.

Theorema 1.

Hay's Flux. p. 96

Fig. 1. SIt Curva quævis V H. (cujus axis V D, applicata H D ad V D perpendicularis) item linea V Z S talis, ut ſi à curvæ puncto liberè ſumpto, puta E, ducatur recta E P ad Curvam, & E A Z ad axem perpendicularis, ſit recta A Z, interceptæ A P æqualis, erit ſpatium $VDS = \frac{DHq}{2}$.

Demonſtratio. Sit angulus H D O ſemirectus, & æqui ſecetur U D, indefinite punctis A, B, C per quæ ducantur, E A Z, F B Z, G C Z & H D parallellæ, & Curvæ occurrentes in E, F, G à quibus ducantur E I Y, F K Y, G L Y, ad U D parallelæ, quin & rectæ E P, F P, G P, H P ſint Curvæ V H perpen-

perpendiculares. Eſt Triangulum HLG ſimile triangulo PDH (nam ob indefinitam ſectionem Curvula GH pro rectâ haberi poteſt) quare eſt HL. LG : : PD. DH, adeoque HL x DH = LG x PD, hoc eſt, HL x HO = DC x DS, & ſimili diſcurſu monſtrabitur, quoniam Triangulum GMF triangulo PCG aſſimilatur, fore LK x LY = CB x CZ & ſimiliter erit KI x KY = BA x BZ, itidem erit ID x IY = AV x AZ; unde conſtat triangulum HDO (quod à rectangulis iſtis HL x HO + LK x LY + KI x KY + ID x IY minime differt) æquari Spatio VDS ((quod itidem à rectangulis DC x DS + CB x CZ + BA x BZ + AV x AZ minime differt) hoc eſt $VDS = \frac{DHq}{2}$. Quod erat Demonſtrandum. Nobile hoc Theorema debetur viro Celeberrimo D. Doctori *Barrow*, qui innumera habet, & ſublimia Theoremata circà linearum Curvarum proprietates: nec mihi quenquam (quorum Scripta edita* ſunt) vidiſſe contigit (imò nec aliis contigiſſe puto) qui tanto judicio, & Succeſſu tanto, abſtruſiorem hanc & minus cultam Geometriæ partem / tractavit & promovit.

* Scri[…] doctissimi Geometr[…] Isaaci Newtoni, hoc temp[…] nondum edita fu[…] sed com-posita fuere anno 1666.

 PROB. I

PROB. I.

Datâ relatione inter PM (quæ distantiam inter Curvæ perpendicularem PC & ordinatim applicatam MC designat) & abscissam AM (quæ distantiam inter applicatam & verticem A designat) æquationem invenire Curvæ lineæ AC naturam definientem. Fig. 1.

UT omnes Curvas sub unâ Regulâ generali comprehendam, adnoto in quâcunque lineâ Curvâ AC fore semper PM x MT = CMq propter angulum rectum PCT. Quarè multiplico singulos terminos PM denotantes per terminum AM (prius in diversos numeros incognitos multiplicatum) & productum pono æquale Quadrato applicatæ CM. Ratio hujus regulæ colligi potest, ex Methodo inveniendi Tangentes à Clarissimo Slusio editâ in *Actis Philosophicis* Reg:, Societatis Anglicanæ. Exemplis rem illustrabo.

Exemp. 1. *Fig.* 2. Detur PM = $\frac{1}{2}$ r & vocetur AM *y*, CM *x*, a, b, c, i, &c. denotent quantitates cognitas & determinatas, item *l*, *m*, *n*, *h*. *k* &c. numeros incogitos. Jam, juxta regulam, multiplico $\frac{1}{2}$ r per ny, & productum $\frac{nry}{2} = x^2$. quæ est æquatio ad parabolam.

Exemp. 2. (*Fig.* 2.) Sit PM = *y* + $\frac{1}{2}$ *r* & quærenda sit æquatio illam curvam determinans: procedens secundū

regulam

regulam multiplico $\frac{r}{2}r + y$ per ny, my, & productum $\frac{nry}{2} + my^2$ pono æquale quadrato ab x, nempe $\frac{nry}{a} + my^2 = x^2$; quæ est æquatio ab curvam quæsitam.

Exemp. 3. Esto $PM = \frac{y^2}{a} + a$, & quæratur curva A G, in qua sit $PM = \frac{y^2}{a} + a$. multiplico $\frac{y^2}{a} + a$ per ny, my, eritque productum $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$. *Fig.* 2.

Fig. 2 *Exemp.* 4. Sit $PM = \frac{y^4}{aaa} + \frac{y^3}{aa} + \frac{y^2}{a} + y$, & querenda sit æquatio istius curvæ naturam definiens, secundum regulam, multiplico $\frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + y$, per ny, my, ly, hy; eritque $\frac{ny^5}{a^3} + \frac{my^4}{a^2} + \frac{ly^3}{a} + hy^2 = x^2$; quæ est æquatio quæsita.

Deniquè sit $PM = \frac{a^3}{y^2}$; multiplico $\frac{a^3}{y^2}$ per ny^2 erit productum $\frac{na^3}{y} = x^2$, vel $na^3 = yx^2$. *Fig.* 3
sed quia n, m, l, h, &c. adhuc sint incognita, modum ostendam ea determinandi.

Prob. II.

Quantitates l, m, n. &c. in præcedenti Problemate usurpatas determinare.

PEr æquationem inventam investigo PM (procedendo secundùm vulgarem aliquam methodum inveniendi Tangentes) & ejus valorem comparo cum valore dato, nempe, singulos hujus cum singulis illius terminis; quæ comparatio determinabit quantitates l, m, n, &c.

Ut

Ut in exemplo primo $\frac{nry}{2} = x^2$, invenio $PM = \frac{1}{4}nr$, hunc valorem comparo cum valore dato sc. $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}nr$ unde post reductionem $n = 2$, quare substituto hoc valore pro (n) in æquatione $\frac{nry}{2} = x^2$ erit $ry = x^2$.

Sic in exemplo secundo $\frac{nry}{2} + my^2 = x^2$, invenio fore $PM = \frac{nr}{4} + my$; jam comparo utrosque hos terminos cum correspondentibus terminis valoris dati sc. $\frac{nr}{4} = \frac{r}{2}$ unde $n = 2$; denique $my = y$ unde $m = 1$. Si substituantur hi valores, prodibit æquatio quæsita, & plenè determinata $ry + y^2 = x^2$.

Similiter in exemplo 3: $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$, inveni $PM = \frac{3ny^3}{2a} + \frac{ma}{2}$; facta igitur debita comparatione sc. $\frac{3ny^2}{2} = \frac{y^2}{a}$, erit $n = \frac{2}{3}$, & ex $\frac{ma}{2} = a$, erit $m = 2$; & substitutis his valoribus, erit $\frac{2y^3}{3a} + 2ay = x^2$.

Fig. 1. Et in exemplo 4. erit $PM = \frac{5ny^4}{2a3} + \frac{2my^3}{a2} + \frac{3ly^2}{2} + hy$. & facta comparatione horum terminorum cum terminis datis, erit $\frac{5ny^4}{2a3} = \frac{y^4}{a3}$; inde $n = \frac{2}{5}$, & ex $\frac{2my^3}{a2} = \frac{y^3}{2a}$ erit $m = \frac{1}{2}$, ex $\frac{3ly^2}{2a} = \frac{y^2}{a}$ erit $l = \frac{2}{3}$, & ex $hy = y$ erit $h = 1$. Et substituendo hos Valores erit equatio $\frac{2y^5}{5a3} + \frac{y^4}{2a2} + \frac{2y3}{3} + y = x$.

Denique in *Exemp.* 5. Est $PM = \frac{na^3}{2y2} = \frac{a^3}{y2}$ Fig. 3. unde $n = 2$, adeoque $2a^3 = yx^2$, quæ est ad Hyperboliformem D C E.

Hæc duo Problemata (vel potius duas partes unius Problematis) fusius sum prosecutus, eo quod à nemine

nemine adhuc tractata ſint, ſaltem quorum ſcripta ad manus meas pervenerunt ; tum maximè, quod horum ope Figurarum Quadraturas ſim determinaturus.

PROB. III.

Parabolæ Quadraturam determinare.

Fig. 4. ESTO parabola VCS cujus latus rectum ſit r. VM vocetur, y, MC, z, unde ex naturâ parabolæ $\sqrt{ry} = z =$ MC. Tum per problema primum inveniatur curva VH, talis ut ſit PM $= \sqrt{ry}$ (per PG hic & in ſequentibus intelligenda eſt Curvæ quæſitæ perpendicularis) ſed per methodum jam traditam invenio Curvam quæſitam definiri per hanc æquationem $nry^3 = x^4$ (per x deſigno applicatas GM, HD Curvæ quæſitæ) & determinando n per Prob. 2. invenies $n = \frac{16}{9}$ unde $\frac{16}{9} ry^3 = x^4$, ac proinde $\sqrt{\frac{4}{9} ry^3} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ VMC. ut conſtat ex Theoremate jam præmiſſo.

PROB. IV.

Prob. IV.

Paraboloidis Cubicalis Quadraturam determinare.

ESTO VCS parabolois Cubicalis, VD axis, & latus rectum r, & VM $= y$; *Fig.* 4. unde ex naturâ Curvæ iſtius erit $rry = z^3$, adeóque $\sqrt[3]{rry} = z$, propterea pro determinatione Quadraturæ areæ VMC, invenienda eſt Curva (per Prob. 1.) VH talis ut ſit ſemper PM $= \sqrt[3]{rry}$, &, procedens ſecundum regulam ibi propoſitam, invenio Curvam VH definiri per hanc æquationem $nr^2y^4 = x^6$, & determinando n (per Prob. 2.) inveniens $n = \frac{27}{8}$, adeóque æquationem quæſitam eſſe $\frac{27}{8} r^2y^4 = x^6$, unde $\frac{1}{4}\sqrt[3]{r^2y^4} = \frac{x^2}{a} = \frac{GM}{2}q =$ VMC. Et in hunc modum Quadrantur infinitæ paraboloides quæ definiuntur per $r^3y = z^4$; $r^4y = z^5$, $r^5y = z^6$, &c.

Prob. V.

Paraboloidis Semicubicalis Quadraturam invenire.

Fig. 4. SIT VCS parabolois ſemicubicalis, cujus hæc eſt proprietas $ry^2 = z^3$, unde $\sqrt[3]{ry^2} = z$; invenienda igitur eſt Curva VH in quâ

qua $PM = \sqrt[3]{r y^2} = MC$; & per problema primum invenio illam definiri per hanc æquationem $n r y^5 = x^6$; &, ut determinetur n, procedo in hunc modum per Prob. 2. quæro PM ex æquatione inventa $n y^5 r = x^6$, & invenio $PM = \frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 n^2 r^2 y^{10}}}$; & facta comparatione cum dato Valore, erit $\frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 r^2 y^{10}}} = \sqrt[3]{r y^2}$; unde provenit $n = \frac{216}{125}$ post debitam reductionem, adeóque Curva VH definitur per $\frac{216 r y}{125} = x^5$; unde erit $\frac{3}{5} \sqrt[3]{r y^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q = VMC$. Et eodem modo Quadrari possunt paraboliformes infinitæ, quæ definiuntur per $r y^3 = z^4$, $r y^4 = z^5$, $r y^5 = z^6$ &c.

Prob. VI.

In Hyperbola OCN quadranda sit Area interminata OCMVL.

Fig. 4. ESto Hyperbolæ potentia $= a^2$, unde $\frac{a^2}{y} = z$; inquirenda igitur est Curva VH talis ut in ea sit semper $PM = \frac{a^2}{y}$; at nullam esse hujusmodi Methodus jam tradita statim deprehendit: nam, juxta regulam, multiplicanda est $\frac{a^2}{y}$ per $n y$; & productum

 $n a^2$

$n a^2$ non poteſt poni æquale x^2, Quadratum determinatum nequit æquari Quadrato indeterminato, ac proinde concludendum eſt Spatium interminatum non eſſe Quadrabile: nam ſi daretur illius Quadratura, daretur etiam Curva quædam V H in quâ eſſet ſemper P M = M C.

Prob. VII.

Hyberboliformis O C N cujus hæc ſit proprietas, $y z^2 = a^3$, Quadraturam determinare Areæ Interminatæ OCMVL.

Fig. 5. Quoniam ex naturâ Curvæ $\sqrt{\frac{a^3}{y}} = z =$ MC, quærenda eſt curva V H in quâ ſemper ſit P M $= \sqrt{\frac{a^3}{y}}$, atque per *Prob.* 1. Invenio Curvam V H definiri per $n a^3 y = x^4$ & determinando n per *Prob.* 2. Invenies $n = 16$, adeóque $16 a^3 y = x^4$; unde Spatium interminatum O C M V L $= 2\sqrt{a^3 y}$.

Prob. VIII.

Prob. VIII.

Sit natura Hyperboliformis definita hâc æquatione $y z^3 = a^4$, & Quadranda sit Area interminata OCMVL.

EX naturâ curvæ $\sqrt[3]{\frac{a^4}{y}} = z$, & invenietur curva VH, in quâ $PM = \sqrt[3]{\frac{a^4}{y}}$, definiri per $27 a^4 y^2 = x^6$; Unde $\frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 y^2} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ OCMVL. Et sic quadrantur Hyperboliformes infinitæ definitæ per $y z^4 = x^5$, $y z^5 = x^6$, $y z^6 = x^7$, &c.

Prob. IX.

In Hyperboliformi OCK cujus hæc sit proprietas $y^2 z = a^3$, Quadranda sit area interminata OCMVL.

Fig. 6. EX hujus curvæ naturâ manifestum est $z = \frac{a^3}{y^2} = MC$; quare Quærenda est curva aliqua, ut distantia inter ejus perpendicularem & applicatam sit æqualis $\frac{a^3}{y^2}$; &, procedendo secundum usitatam Methodum, invenio Curvam quæsitam definiri per $y x^2 = n a^3$; &, determinando (n) per Prob. Secundum, erit $n = 2$, adeóque æquatio est $2 a^3 = y x^2$, quæ itidem est æquatio ad Hyberboliformem (sed alterius naturæ) SGH; & quoniam

 illius

illius perpendicularis GP, inter verticem & applicatam cadit, vel sursum tendit, ideo $\frac{a^3}{y} = \frac{x^2}{2} =$ KCMD. Et Aream OCMVL esse ex earum numero quas Geometræ vocant plusquam infinitas, jam monuit clarissimus Nostras D. *David Gregorius* in pulcherrimo suo Tractatu, de Dimensione Figurarum.

PROB. X.

Sit ACD curva talis ut, ducta utcunque MC ad AD normali, sit potestas quævis ipsius AD ad similem potestatem partis AM, ut potestas quævis partis DM ad similem potestatem applicatæ MC; & determinanda sit Quadratura Areæ AMC.

Fig. 7.

ESTO AD $= b$, & exponens illius potestatis 2; AM vocetur y, unde etiam exponens illius potestatis est, 2 esto præterea exponens potestatis lineæ DM seu $b - y$, (1) adeoque exponens applicatæ MC seu z est 1, tum ex naturæ lineæ curva. $b^2 : y^2 :: b - y . z$ unde $z = \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, Quæratur ergo curva AH, in qua sit PM $= \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, invenieturque per Prob. 1. & 2. illam definiri per $\frac{2}{3} by^3 - \frac{1}{2} y^4 = b^2 x^2$, unde $\frac{y^3}{3b} - \frac{y^4}{4bb} = \frac{x^2}{2} =$ AMC. Atque hæc eadem est curva de qua loquitur D. *Cartesius* in *tom.* 3. Epist. pag. 219. quam præferendam putat (ob constructionis facilitatem) curvæ quam Galli vocant *la Galande*.

PROB. XI.

Prob. XI.

Determinanda sit Quadratura Areæ AMC, & definiatur natura Curvæ per $y^5 + ay^4 + a^2y^3 + a^3y^2 + a^5 = a^4z$. Fig. 4.

Quærenda est Curva VH, talis ut in eâ sit semper $PM = MC = z = \frac{y^5}{a^4} + \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + a$. Et per Prob. 1. definietur per $ny^6 + may^5 + la^2y^4 + ka^3y^3 + ha^5y = a^4x^2$, &, determinando n, m, l, k, h (per Prob. 2.) erit $n = \frac{1}{3}$ $m = \frac{2}{5}, l = \frac{1}{2}, k = \frac{2}{3}, h = 2$; adeóque æquatio quæsita est $\frac{1}{3}y^6 + \frac{2}{5}ay^5 + \frac{1}{2}a^2y^4 + \frac{2}{3}a^3y^3 + 2a^5y = a^4x^2$, adeóque $\frac{y^6}{6a^4} + \frac{y^5}{5a^3} + \frac{y^4}{4a^2} + \frac{y^3}{3a} + ay = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMC$.

Atque hactenùs solas illas figuras tractavi quæ sunt indefinitè Quadrabiles; & quantillo labore earum Quadraturæ, per hanc Methodum determinentur, aliis judicandum relinquo: Ad illas jam progredior quæ hujusmodi Quadraturam respuunt: & expressè moneo me Quadraturas, quas hic exhibiturus sum per series infinitas, non pro Geometricis, sed pro Algebraicis vel Arithmeticis, habere.

Prob.

PROB. XII.

Circuli Quadraturam determinare.

A Circulo initium faciam, qui omnium linearum curvarum simplicissima est, si curvæ simplicitas non ex æquationis, sed descriptionis (ut re verâ debet) simplicitate æstimetur.

Fig. 8. Sit itaque Circuli Quadrans ASD in quo AM vocetur y, & ordinata MC z, & radius AL $= r$. Tum ex Circuli naturâ erit $z^2 = r^2 - y^2$, ac proinde $z = \sqrt{r^2 - y^2}$. Hunc valorem resolvo in seriem secundum Methodum celeberrimi D. *Isaaci Newtoni*, & invenio $z = r \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. quærenda igitur est Curva AGH in qua PM $= r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. & invenietur per Prob. primum Curvam quæsitam definiri per hanc æquationem.

$$nry - \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} - \frac{ky^7}{16r^5} = x^2;$$ & determinando Quantitates, n, m, l, k, per Prob. secundum, invenietur $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, & substituendo hos valores, æquatio erit $2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5} = x^2$. Unde $ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2}$

$= GMq$

$= \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Vel si quæreretur Quadratura totius Quadrantis, erit $ASD = r^2 - \frac{1}{6}rr - \frac{1}{40}rr - \frac{1}{112}rr$ ------ &c. Unde $4rr - \frac{2}{3}rr - \frac{1}{8}r^2 - - \frac{1}{28}r^2 =$ toto Circulo. Et si hæc series per numeros exprimatur, ponendo $r = \frac{1}{2}$, erit area Circuli $= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{112}$ ----- &c. in infinitum. Notatu dignum arbitror hinc elici posse dimensionem Zonæ Circularis, quam à celeberrimo Geometrâ D. *Isaaco Newtono* inventam refert clariss. *David Gregorius* in memorato tractatu. Esto ABCD Zona cujus latitudo VL $= y$, & Circuli radius $= r$, per præcedentem Quadraturam ---- VBCL $= ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5}$ -- Adeóque -- 2 VBCL $=$ ABCD $= 2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5}$.

Fig. 9.

Prob. XIII.

Hyperbolæ Quadraturam determinare.

Fig. 10.

SIT LSC Hyperbola cujus Asymptoti VD, VP, & in quâ VE $=$ EL $= a$, atque VA $= c$; vocetur abscissa AM y, & ordinatim applicata z. Sed ex naturâ Hyperbolæ VE $\times$ EL $=$ VM

$= VM \times MC$, id est $a^2 = yz + cz$; adeoque est $z = \frac{a^2}{c+y}$, & factâ divisione, secundum jam receptam Methodum, erit $z = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ --- &c. Quærenda igitur est Curva AGH, in quâ sit ------- $PM = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ ----- &c. & per Prob. primum invenietur illam definiri hâc æquatione $\frac{n a^2 y}{c} - \frac{m a^2 y^2}{c^2} + \frac{l a^2 y^3}{c^3} = x^2$, & determinando n, m, l, per Prob. 2. erit $n = 2, m = 1, l = \frac{2}{3}$; ac proinde æquatio quæsita est $\frac{2 a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{c^2} + \frac{2 a^2 y^3}{3 c^3} = x^2$; unde $\frac{a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{2 c^2} + \frac{a^2 y}{3 c^3} = ASCM = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2}$. Hæc eadem est Hyperbolæ Quadratura quam exhibuit celebris vir *Nicolaus Mercator* in suâ Logarithmo-techniâ, quamvis methodo usus sum ab illius planè diversâ.

Considerando aliam Hyperbolæ proprietatem; aliam etiam illius Quadraturam inveniemus. Sit ergò in *Fig.* 11. apposito schemate SCL Hyperbola æquilatera, cujus centrum A, & latus transversum RS; ponatur $AM = y, = KC$, $MC = z$, AR

= AS

$= AS = r$; unde ex naturâ Hyperbolæ $rr + yy = zz$, adeoque $z = \sqrt{rr+yy}$, extrahendo radicem Quadraticam ex $rr + yy$ erit $z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. Quærenda ergo est Curva AH in qua sit $PM = z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. & procedendo per Prob. primum invenietur illam definiri hac æquatione $nry + \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} + \frac{ky^7}{16r^5} = x^2$, & determinando, n, m, l, k, per Prob. secundum, erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, substitutis his valoribus, erit æquatio ad Curvam quæsitam plenè determinata $2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5} = x^2$, adeóque erit ---- $ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = ASCM$.

Ex hâc Hyperbolæ Quadraturâ facile est Zonæ Hyperbolicæ Quadraturam determinare. Sint EDA, GCB, Hyperbolæ oppositæ, quarum centrum K, & vertices A, B; Zona ABCD, cujus latitudo $KL = y$, semiaxis transversus AK, vel $KB = r$; unde per præcedentem Quadraturam *Fig. 12.*

D KLCB

$KLCB = ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5}$ ac proinde erit $ABCD = 2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5}$ ---- &c.

Prob. XIV.

Ellipſeos Quadraturam determinare.

Fig. 8. IN ſemi-ellipſi LSCD ſit ſemiaxis tranſverſus $AS = b$ & ſemiaxis conjugatus $AL = a$, & ponatur abſciſſa $AM = y$, ordinatim applicata $MC = z$; unde, ex naturâ Ellipſeos, $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, ut ergò determinetur Area AMCS, primò reſolvenda eſt $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, in ſeriem extrahendo radicem ex $\sqrt{a^2 - y^2}$; unde invenietur $z = b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{5a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ---- &c. Quærenda igitùr eſt Curva aliqua AH, in quâ ſemper PM $= b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{8a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ---- &c. & invenietur per Prob. 1. illam definiri hâc æquatione $nby - \frac{mby^3}{2a^2} - \frac{lby^5}{8a^4} - \frac{kby^7}{16a^6} = x$; &, determinando quantitates,

titates, n, m, l, k, per Prob. 2. erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$; adeóque $2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6} = x^2$; unde $by - \frac{by^3}{6a^2} - \frac{by^5}{40a^4} - \frac{by^7}{112a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMSC$.

Inde facilè eruitur Zonæ Ellipticæ dimensio, ut, si latitudo Zonæ sit $AM = y$, cæteris positis ut priùs, erit Zona $2\,AMCS = 2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6}$ — --- &c.

Prob. XV.

Sit AD ($= d$) positione & magnitudine data, & Curva SCD talis ut ea ducta utcunque recta MC ($= z$) ad AD perpendicularis, sit $d^3 = z^3 + y^3$, & determinanda sit Areæ AMCS Quadratura.

Fig. 13.

Quoniam ex naturâ Curvæ $z = \sqrt{(3)\,d^3 - y^3}$ extrahenda est radix Cubica ex $d - y^3$, & invenietur fore $z = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d}$ --- &c.

 Quæren-

Quærenda est linea Curva AGH, in quâ $PM = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5}$ — — &c. & definietur Curva quæsita AH hac æquatione $n\,dy - \frac{my^4}{3d^2} - \frac{ly^7}{9d^5} = x^2$; & determinando n, m, l, per problema secundum, erit $n = 2$, $m = \frac{1}{2}$, $l = \frac{2}{7}$, adeóque $2\,dy - \frac{y^4}{6d^2} - \frac{2y^7}{63d^5} = x^2$; unde etiam $dy - \frac{y^4}{12d^2} - \frac{y^7}{63d^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et sic Quadrantur Cycliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 - y^4 = z^4$, $d^5 - y^5 = z^5$ — — &c.

PROB. XVI.

Esto AD ($= d$) linea recta positione & magnitudine data, & SCD linea Curva talis ut, ductâ utcunque MC ($= z$) ad AD normali, sit Cubus ex AD cum Cubo ex AM ($= y$) æquales Cubo ex MC sc. $d^3 + y^3 = z^3$; & determinanda sit Quadratum Areæ AMC.

Fig. 13.

QUoniam $z = \sqrt[3]{d^3 + y^3}$ resolvenda est $\sqrt[3]{d^3 + y^3}$ in seriem radicem cubicam extrahendo, & invenietur $z = d + \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5}$ — — — &c. Quærenda est

est Curva AH in quâ sit semper PM $= d + \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - -$ &c. & per Prob. 1. & 2. erit æquatio ad Curvam quæsitam --- $2dy + \frac{y^4}{6d^2} - \frac{2y^7}{63d^5} = x^2$ unde $dy + \frac{y^4}{12d^2} - \frac{y^7}{63d^5} = \frac{x^2}{2} =$ AMCS. Et sic Quadrari possunt Hyperboliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 + y^4 = z^4$, $d^5 + y^5 = z^5$, &c.

Prob. XVII.

Sit $AD = a$, $AS = b$, & sit Curva SCD talis ut, ductâ quavis MC ($=z$) ad AD perpendiculari, sit $z^3 . a^3 - y^3 :: b^3 . a^3$, & determinanda sit Area AMCS. Fig. 13.

Quoniam ex naturâ Curvæ $z = \frac{b}{a}\sqrt{(3)\,a^3 - y^3}$, extrahenda est radix ex $a^3 - y^3$; invenieturque $z = b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6} - -$ &c. Quærenda est Curva A H in quâ P M $=$ M C $= b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6}$, &c. & per Prob. 1 & 2. invenietur Curvam quæsitam definiri hâc æquatione $2by - \frac{by^4}{6a^3} - \frac{2by^7}{63a^6} = x^2$, ac propterea $by - \frac{by^4}{12a^3} - \frac{by^7}{63a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et sic quadrantur Ellipsiformes infinitæ, quæ definiuntur æquationibus $\frac{b}{a}\sqrt{(4)\,a^4 - y^4} = z$, $\frac{b}{a}\sqrt{(5)\,a^5 - y^5} = z$, &c.

Prob. XVIII.

Esto AD (= d) linea recta positione & magnitudine data, & SCD Curva talis ut, ductâ utcunque MC ad AD normali, sit $d^2 z + y^2 z = r^3$; & Quadranda sit Area AMCS.

Fig. 13.

Quoniam $z = \frac{r^3}{d^2 + y^2}$; fiat divisio, & invenietur $z = \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{d^6}$; eritque $\frac{2r^3 y}{d^2} - \frac{2r^3 y^3}{3d^4} + \frac{2r^3 y^5}{5a^6} = x^2$ æquatio ad Curvam AH, in quâ $PM = \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{a^6}$; unde $\frac{r^3 y}{d^2} - \frac{r^3 y^3}{3a^4} + \frac{r^3 y^5}{5d^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMCS$.

Prob. XIX.

Cujusvis Figuræ Quadraturas infinitas invenire.

Sint duæ quælibet Curvæ ACE, BRF, & à quovis puncto C in curvâ ACE ducatur tangens CT, & CP ad EP, & CR ad AB parallela, si fiat TP.PC::DR.PX, erit ABZY = BEF, APXY = DBR. Eximium hoc Theorema debetur etiam viro celeberrimo D. Doctori *Barrow*.

Quærenda sint, exempli gratiâ, Quadratura infinitæ Paraboloidis Cubicalis BRF. Assumatur pro arbitrio

arbitrio quælibet Curva A C E, putà, parabola communis, cujus parameter sit r (quod idem sit cum parametro paraboloidis) & ponatur A P $= y$, P X $= z$; eritque T P $= 2y$, P C $= \sqrt{ry}$, & ex naturâ paraboloidis D R $= \sqrt{(6)}\, r^5 y$; adeóque Analogia erit $2y . \sqrt{ry} :: \sqrt{(6)}\, r^5 y . z$; unde $z = \sqrt{(6)}\, \frac{r^8}{64y^2}$ quæ est æquatio ad Curvam Y X Z, cujus Quadratura invenietur per methodum jam traditam, sc. $\frac{3}{4}\sqrt{(6)}\, r^3 y^4$ $=$ A P Y Z $=$ D B R. Quæ est Quadratura Paraboloidis diversa ab illâ quam dedi in Prob. 4. Et eodem modo inveniri potest alia atque alia Quadratura, assumendo aliam atque aliam Curvam A C E. Et sic tractari possunt omnes aliæ Curvæ, quemadmodum paraboloidem hìc tractavi.

Exhinc etiam manifestum est Figuras deprimi posse ad simpliciores & Quadratu faciliores; nam in figurâ ABZY Curva YXZ, definita hac æquatione $z^6 = \frac{r^8}{64y^2}$, magìs est composita quàm Curva B R F. Adeóque non parùm Geometriam promoveret, qui methodum daret Figuras ad simplicissimas reducendi.

PROB. XX.

Curvam invenire cujus Area per datam quamlibet æquationem designetur.

DEsignetur Area hac æquatione $\sqrt{r^3 y} = VMC$ (concipiendo VCS esse Curvam quæsitam.) Tum ex ostensis patet $\sqrt{r^3 y} = \frac{x^2}{2}$ esse æquationem ad Curvam aliam VGH in quâ PM = MC (quæ est ordinata Curvæ quæsitæ). Investigetur ergò valor lineæ PM; & invenietur $PM = \sqrt{\frac{r^3}{4y}} = z$, seu $4z^2 y = r^3$; quæ est æquatio ad Curvam quæsitam VCS, cujus area $= \sqrt{r^3 y}$. Notandum quod hic (ut prius) y denotat abscissas VM, z ordinatas MC, & x ordinatas GM.

PROB. XXI.

Curvas infinitas invenire quarum Areæ per unam datam æquationem designentur.

SOlutio hujus problematis à duobus præcedentibus pendet; inveniatur una Curva cujus Area per datam æquationem exprimatur (per problema 20) & sic infinitæ inveniri possunt per Prob. 19.

PROB. XXII.

Prob. XXII.

Datâ quâlibet Curvâ AHD, Curvam aliam AFB invenire, cujus area AGF æquetur rectangulo contento sub ordinatâ GH & abscissâ AG Curvæ datæ. Fig. 20.

IN Curvâ AHD sit $AG = y$, $GH = x$; & exprimatur illius natura hac æquatione $2ay - yy = x^2$; unde $\sqrt{2ay - y^2} = x$, adeóque $\sqrt{2ay^3 - y^4} = xy = AH$. Habetur ergò Area figuræ AGF, unde facilè Curva AFB definitur per problema 20. sc. $z^2 = \frac{9a^2y - 12ay^2 + 4y^3}{2a - y}$.

Prob. XXIII.

Datâ quâlibet Curvâ AHD, aliam Curvam AFB invenire cujus area AGF æquatur rectangulo contento sub ordinatâ GH Curvæ AHD, & constanti aliquâ datâ rectâ (a) Fig. 20.

DEfiniatur Curva AHD, ut prius, $\sqrt{2ay - yy} = x$; unde $\sqrt{2a^3y - a^2y^2} = ax = AGF$; habetur ergò natura Curvæ AFB per Prob. 20. sc.

E $z^2 =$

$z^2 = \frac{a^4 - 2a^2 y^2 + a^2 y^2}{2ay - y^2}$. Hic & in precedenti z denotat ordinatas Curvæ quæsitæ A F B.

Et quidem aliis modis infinitis (præter duos jam traditos) inveniri poteſt curva, cujus area, ope alterius curvæ datæ, ſit quadrabilis, per Prob. 20. Quod fieri poſſe aſſeruit jam laudatus Germanus, ſed quo modo faciendum ſit nequaquam oſtendit.

Alia ſolutio problematis præcedentis.

Fig. 21. SIT Curva data ACB, CT tangens in puncto quolibet C, ordinata CF; fiatq; TF. FC : : *a*. FZ, orietur hinc Curva AZZ, talis ut *a* + FC = AFZ; ut demonſtratum eſt ab illuſtriſſimo D. Doctore *Barrow*.

Nec quidquam jam deeſt ut Methodus quam tradidi Figurarum Quadraturas determinandi, ad omnes figuras extendatur (exceptis iis quæ a Curvis tranſcendentibus terminantur, quas nulla hactenus vulgata Methodus comprehendit) niſi ut difficultates duas amoveam; quæ in quibuſdam caſibus contingere poſſunt; quarum prior accidit cum figuram aliquam Quadrando neceſſe ſit & Radicem ex æquatione affectâ (& ſuprà Quadraticas aſcendente) extrahere, in quo caſu unicum remedium mihi cognitum eſt radicem iſtius æquationis in ſeriem infinitam (juxtà Methodum clariſſimi viri D. Iſaaci Newtoni, Geometræ non minùs

quam

quam Analystæ præstantissimi) resolvere, quam præclo commissam esse à clariss. Wallisio audimus, quamque insignis ipse D. Newtonus mihi in Manuscriptis pro summâ sua humanitate communicavit: Nam Methodus Generalis æquationum radices Analyticè determinandi (in Actis Eruditorum Lipsiæ publicatis A° 1683, Mense Maio à præclaro illo Germano edita) huic negotio parùm vel nihil inservit, ut de insuperabili in eâ calculi molestiâ nihil dicam. Sed nihilominus inventum est inter præcipua Artis Analyticæ meritò numerandum.

Secunda difficultas est, cum valor ordinatim applicatæ constat terminis asymmetris; nam res esset immensi laboris æquationem ab asymmetriâ liberare, si plures sint quam quatuor termini signis radicalibus affecti, ut satis nôrunt Analyseos periti. Sed huic difficultati remedium optimum suppeditavit insignis Geometra G. G. Leibnitius in novâ suâ Methodo Tangentes inveniendi in Actis Eruditorum Anni superioris publicatâ. Ibi enim præclarus vir viam expeditam ostendit, Tangentes inveniendi, quamvis æquatio curvæ naturam exprimens terminis irrationalibus quàm maximè sit implicita, non ablatis irrationalibus. Quomodo ista methodus ad præsens negotium sit applicanda, exemplo ostendam.

Esto V C S circuli Quadrans, cujus Diameter sit (r); & V M vocetur y, item ordinata M C *Fig. 4.*

z. Tum, ex naturâ circuli, $z = \sqrt{ry - y^2}$ &, resolvendo $ry - y^2$ in seriem per extractionem radicis, invenietur. $z = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^3}{4r}} \sqrt{\frac{y^5}{16r^3}}$.....&c. Ut determinetur Quadratura areæ V M C, invenienda est curva V H, in quâ $PM = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^3}{4r}} - \frac{y^5}{16r^3}$; eritq; per Prob. 1. æquatio ad curvam quæsitam V H $\sqrt{nry^3} - \sqrt{\frac{my^5}{4r}} - \sqrt{\frac{ly^7}{16r^3}} = x^2$; & auferendo quantitates fractas (quod tamen absolutè necesse non est, sed hic fit ob majorem facilitatem) multiplicando per $\sqrt{16r^3}$: erit $\sqrt{16nr^4y^3} - \sqrt{4mr^2y^5} - \sqrt{ly^7} = x^2\sqrt{16r^3}$; &, determinando n, m, l, (per Prob. 2.) (quæ sola est difficultas) sic procedo: compendii causâ pono $p = 16nr^4y^3$ $q = 4mr^2y^5$, $s = ly^7$; eritq; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{s} = x^2\sqrt{16r^3}$; sed per calculum ibi explicatum invenietur $\sqrt{p} = \frac{dp}{\sqrt{4p}}$, $\sqrt{q} = \frac{dq}{\sqrt{4q}}$, $\sqrt{s} = \frac{ds}{\sqrt{4s}}$, atque $x^2 \sqrt{16r^3} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$; &, substitutis his valoribus, erit $\frac{dp}{\sqrt{4p}} - \frac{dq}{\sqrt{4q}} - \frac{ds}{\sqrt{4s}} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$; sed, per eundem calculum, erit $dp = 48nr^4y^2\,dy$, $dq = 20mr^2y^4\,dy$, & deniq; $ds = 7ly^6\,dy$, &, substituendo hos valores cum valoribus quantitatum $\sqrt{4p}$, $\sqrt{4q}$, $\sqrt{4s}$, æquatio erit $\frac{48nr^4y^2dy}{\sqrt{64nr^4y^3}} - \frac{20mr^2y^4dy}{\sqrt{16mr^2y^5}} - \frac{7ly6dy}{\sqrt{4ly7}} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$.———

Quam clarissimus Author æquationem differentialem appellat: & hæc æquatio in Analogiam resoluta dat. $dy. dx :: x\sqrt{64r^3}. \frac{48nr^4y^2}{\sqrt{64nr^4y^3}} \frac{20mr^2y^4}{\sqrt{16mr^2y^5}} \frac{7ly6}{\sqrt{4ly7}} :: x$. PM. ut ex eodem calculo est manifestum, adeóq; erit

PM=

$$PM = \frac{48 n r^4 y^2}{\sqrt{4096 n r^7 y^3}} - \frac{20 m r^2 y^4}{\sqrt{1024 m r^5 y^5}} - \frac{7 l y^6}{\sqrt{256 l r^3 y^7}} = \&c.$$

Et, factâ comparatione horum terminorum cum terminis prioribus P M denotantibus, juxtà cognitas comparationis leges, ſc. $\frac{48 n r^4 y^2}{\sqrt{4096 r^7 y^3}} = \sqrt{ry}$, inde $n = \frac{16}{9}$ ſimiliter $m = \frac{16}{25}$; & $l = \frac{16}{49}$, quibus ſubſtitutis erit $\sqrt{\frac{16 ry}{9}} - \sqrt{\frac{16 y^5}{10 0 r}} - \sqrt{\frac{y^7}{496 r^3}} = x^2 = GMq$, adeóque $\sqrt{\frac{4 ry^3}{9}} - \sqrt{\frac{16 y^5}{400 r}} - \sqrt{\frac{y^7}{196 r^3}} = \frac{x^2}{2} = \frac{CMq}{2} = V M C$. Adeóq; etiam hoc modo habetur circuli Quadratura. Et ſimilem diſcurſum in aliis adhibere non erit difficile, cuivis in ſingulari hoc calculi genere verſato, ita ut ſuperfluum duxi præſtantiſſimæ hujus Methodi uſum pluribus exemplis illuſtrare. Unum tamen eſt quod hic obiter notandum puto, poſſe ex hac Tangentium methodo breviter demonſtrari veritatem Regulæ quam dedi pro ſolutione problematis primi.

Namq; $dy . dx$: : T M. M C (ut ex iſtâ methodo eſt manifeſtum) ſed T M. M C : : M C. P M. ob angulum rectum T M P. Ergò $dy . dx$: : M C. P M (vel poſito x pro M C) erit $dy . dx$: : x. P M. Unde P M $x dy = x dx$, &, ſubſtituendo y & x prò earum differentiis dy, dx, erit P M $x y = x^2$ Quod demonſtrandum erat.

Jámq; concludo, ſi nulla ſit Curva in quâ diſtantia inter illius perpendicularem & ordinatam ſit æqualis

lis correſpondenti ordinatæ in Curvâ Figuram (cum rectâ vel rectis) comprehendentem, illam Figuram non eſſe indefinitè Quadrabilem; nam ſi daretur illius Quadratura indefinita, daretur etiam hujuſmodi Curva, ut patet ex *Prob.* 20. Et nullam eſſe talem Curvam pro Circulo & Hyperbolâ, facilè poſſum demonſtrare, ſed demonſtrationem ob nimiam prolixitatem hic omitto.

De Linearum Curvarum Rectificatione.

QUiſnam fuerit qui primò Curvæ rectam æqualem invenit diu multùmq; Anglos inter & Batavos diſputatum fuit; & qui pleniùs de eâ re ſibi ſatisfieri volunt, totam diſputationem videre poſſunt, in eximio libello de Cycloide à Clariſſ. Walliſio Edito *pag.* 91, 92, 93, *&c.* itémq; in Horologio Oſcillatorio illuſtriſſimi Hugenii *pag.* 72, 73, & deniq; in Epiſtolâ Walliſii in Actis Philoſophicis Reg. Societ. publicatâ Num. 98. res enim tanti non eſt ut ulteriori diſquiſitione digna videatur, mihi præſertim qui nec Anglus ſum nec Batavus. Ea tamen, quæ, re benè perpenſâ, utrinq; manifeſta videntur, breviter annotabo: 1. Quod Guliel. Nelius, Equitis Angli Filius, omnium primus rectam Curvæ æqualem invenerit.

2. Quod non datam Curvam rectificaverit, ſed Curvam rectificationis capacem exhibuerit. 3. Quod dig-

nissimus

nissimus & Geometra peritissimus D. Christoph. Wren primo oblatæ Curvæ (sc. Cycloidi) rectam æqualem determinaverit. 4. Quod Heuratius primo ostenderit quamlibet datam Curvam rectificare, suppositis Figurarum Quadraturis. Et in eo Heuratii Methodus non parum est conspicua quod statim indicat quænam illa Figura sit cujus Quadratura Curvam datam rectificaret; Adeóq; cum jam Methodum generalem præmisi Figurarum Quadraturas determinandi; facilè erit Curvam aliquam in rectam transmutare; Et recta illa vel per æquationem finitam (cum nempe Figura est indefinitè Quadrabilis) vel per seriem infinitam exprimetur. Heuratius enim tali methodo destitutus, non potuit methodum suam Curvas rectificandi, ad omnes illas Curvas extendere, Quarum rectificationes a figuris indefinitè Quadrabilibus dependent; multoq; minus cum à figurâ specialis tantum Quadraturæ capaci dependerent.

THEOREMA 2.

Fig. 14. SINT duæ lineæ Curvæ ACE, GIL, & recta AF ejus naturæ ut (ductâ ex puncto M liberè sumpto, perpendiculari *MI*, secante Curvas in C & I, uti & CP perpendiculari ad Curvam ACE) sit.... *MC.* CP : : R. *MI* (R hic est quælibet linea recta data vel assumpta) erit AGILEF = Rx

Rx ACE. Demonstratio hujus Theorematis habetur in Epistolâ Heuratii ad Schotenium.

Prob. I.

Determinare Longitudinem Parabolæ. A C E.

Fig. 14. SIT parabolæ vertex *A*, ipsius axis *AG*, & parameter (a); *AM* vocetur x & *MC* vocetur y; unde, ex naturâ parabolæ, $x^2 = ay$; per methodum aliquam vulgarem Tangentes inveniendi, constabit fore PM $= \frac{2x^3}{a^2}$, adeoq; PM$q = \frac{4x^6}{a^4}$, unde PC $= \sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{a^2}}$. jam, quia CM. CP : : a. MI; vel in terminis Analytricis $\frac{x^2}{a}$. $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{a^2}}$: : a. z (posito nimirum MI $= z$) unde $z = \sqrt{a^2 + 4x^2}$, quæ est æquatio ad Hyperbolam; adeoq; pro determinatione longitudinis lineæ parabolicæ A C E, Quadranda est Area Hyperbolica A G I L E F (ut in *Prob.* 13.) eritque,

A G I L F $= ax + \frac{2x^3}{3a} - \frac{2x^5}{5a^3} + \frac{4x^7}{7a^5}$ ——————&c.

Unde axACE $= ax + \frac{2x^3}{3a} - \frac{2x^5}{5a^3} + \frac{4x^7}{7a^5}$ —&c. per Theor. 2.

Adeoq; ACE $= x + \frac{2x^3}{3a^2} - \frac{2x^5}{5a^4} + \frac{4x^7}{7a^6}$——————&c.

Prob.

Prob. II.

Circuli Peripheriæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACF circuli Quadrans, cujus radius sit d. & vocetur PM y, MCx; & MI z, sitq; GIL talis curva ut, ductâ utcunq; normali CMI ad rectam PF, sit MC. PC : : d (recta libere sumpta). MI. id est $\sqrt{dd-yy}$. d : : d. z. unde $z = \frac{dd}{\sqrt{dd-yy}}$ quæ est æquatio ad curvam GIL; adeóq; PM$I6 = dy + \frac{y^3}{6d} + \frac{3y^5}{40d^3} + \frac{5y^7}{112d^5} - -$ &c. Sed per Theor. 2. est dx AC $= dy + \frac{y^3}{6d} + \frac{3y^5}{40d^3} + \frac{5y^7}{112d^5} -$ &c. Ergò AC $= y + \frac{y^3}{6dd} + \frac{3y^5}{40d^4} + \frac{5y^7}{112d^6} - -$ &c. *Fig. 15.*

Prob. III.

Hyperbolæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACE Hyperbola æquilatera cujus semiaxis BA $= a$ & centrum B; & BM vocetur y, ACx, unde ex naturâ Hyperbolæ $a^2 + y^2 = x^2$; ponatur PC Hyperbolæ in C perpendicularis; *Fig. 16.*

invenietur PM$=y$ adeoq; PC$=\sqrt{a^2+2y^2}$: si fiat MC. CP :: a. M. id est, $\sqrt{a^2+y^2}$. $\sqrt{a^2+2y^2}$ :: a. z; erit $z=\frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}}$ quæ est æquatio ad Curvam GIL.

Sed $\sqrt{a^4+2a^2y^2}=a^2+y^2-\frac{y^4}{2a^2}$ ——————— &c.

Et $\sqrt{a^2+y^2}=a+\frac{y^2}{2a}-\frac{y^4}{8a^3}$ ——————— &c.

Ideoq; $\frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}}=a+\frac{y^2}{2a}-\frac{5y^4}{8a^3}$ ——————— &c.

Unde BELG $=ay+\frac{y^3}{6a}+\frac{5y^5}{40a^3}$ ——————— &c.

Atq; ACE $=y+\frac{y^3}{6a^2}-\frac{5y^5}{40a^4}$ ——————— &c.

De Curvarum superficierum dimensione.

QUemadmodum linearum Curvarum longitudines, sic etiam superficierum, quæ ab illarum rotatione generantur, dimensio ex quarundam Figurarum Quadraturis dependet, ut ex sequenti Theoremate constat.

THEOREMA 3.

Fig. 17. SIT MP Curvæ AMB perpendicularis & linea KZL talis ut (ductâ MFZ ad axem AD normali) sit MP correspondenti FZ æqualis; erit superficies producta à rotatione Curvæ AMB circà axem

axem AD, ad ſpatium ADLK, ut Circumferentia Circuli ad ſuum radium.

Hoc etiam unum eſt ex innumeris & præclaris Theorematis viri celeberrimi D. Iſaaci Barrow.

Prob. I.

Superficiem Sphæræ determinare.

SIT AMB Semicirculus à cujus rotatione data ſphæra producitur: & deſignet r radium & c circumferentiam cujuslibet circuli; & ſit AB (diameter Semicirculi AMB) $= 2d$. jam quoniam omnes lineæ Circulo perpendiculares MP perveniunt ad Circuli centrum P; ideo erit KZL parallellogrammum rectangulum cujus longitudo diameter AB & altitudo $AK = d$, radius Semicirculi AMB; unde $AL = 2d^2$; (per literam s ubiq; deſigno ſuperficiem Curvam;) ideo per Theorem. tertium, $s.\ 2d^2 :: c.\ r.$ unde $s = \frac{2d^2c}{r}$; vel, ponendo $r = d$, erit $s = 2dc$; ac propterea Superficies Sphæræ æquatur rectangulo cujus Longitudo eſt Circumferentia & Latitudo Diameter Circuli in Sphærâ maximi. Fig. 18.

Notatu dignum arbitror hinc conſequi omnium

Theorematum longe nobilissimum quo æternam sibi famam acquisivit Geometrarum Princeps *Archimedes*; Quod, scilicet, superficies Sphæræ sit æqualis quatuor maximis in eâ Circulis. Sit enim $Q =$ maximo in Sphæra Circulo; at qui $Q = \frac{dc}{2}$, ut ab *Archimede* demonstratum est; Ergo $2Q = dc$, & $4Q = 2dc$; sed jam inventum est $s = 2dc$; Ergo $4Q = s$. Quod erat demonstrandum.

Prob. II.

Superficiem Conoidis Parabolici determinare.

Esto r latus rectum Parabolæ AMB à cujus rotatione conoides producitur, sit axis AD, vertex A, & vocetur AF, y; FM x; per methodum aliquam tangentium invenietur $PMq = \frac{1}{4}r^2 + ry$; vel, ponendo $FZ = z$, quia supponitur $PM = FZ$, aut $\frac{1}{4}rr + ry = z^2$, quæ est æquatio ad parabolam cujus axis idem est cum axe parabolæ datæ AMB; cujus vertex est C, existente $AC = \frac{1}{4}r$; & latus illius rectum etiam r, invenietur $AKLD = \sqrt{\frac{4}{9}rv^3} - \frac{1}{12}r^2$ existente $CD = v$; sed $s.\ \sqrt{\frac{4}{9}rv^3} - \frac{1}{12}r^2 :: c.\ r.$ per Theorema 3. Ergo $s = \sqrt{\frac{4c^2v^3}{9r}} - \frac{1}{12}rc$.

In

In hunc modum menſurantur non modò ſuperficies Conoïdis Hyperbolici, & Sphæroïdis, ſed Quævis alia Curva ſuperficies quæ generatur à rotatione lineæ Curvæ; & hæc duo exempla ſatis oſtendunt quomodò eadem Methodus ad omnes alias ſuperficies Curvas ſit Applicanda.

ANIM

ANIMADVERSIO

In Methodum Figuras dimetiendi,

A clarissimo Quodam Germano editam in Actis Eruditorum Lipsiæ publicatis.

METHODUM hanc proposuerat Doctissimus illius Author Anno 1683, Mense *Octob.* quam adeò perfectam credebat, ut vel Quadraturam Figuræ, vel ejusdem Quadraturæ impossibilitatem determinaret; & ex eâ Circuli & Hyperbolæ Quadraturam Geometricam impossibilem esse concluserat. Posteà verò perspexit clarissimus vir tantâ perfectione præditam non esse, ut exinde Circuli, Hyperbolæ aut alterius Figuræ Quadraturæ impossibilitas probari possit, ut ingenuè ipse fatetur in iisdem actis Anni sequentis, ubi ait se amore veritatis coactum hoc unum monere. Unde existimat quasdam esse Figuras quæ indefinitæ Quadraturæ non sunt capaces & exemplum Figuræ scribit in quâ succedere ait Quadraturam specialem sine generali: in hoc tamen hallucinatus est claris. vir quod ex suâ Methodo Figuram aliquam, Quadraturam indefinitam recusare conclusit; priusquam demonstrasset

Metho-

Methodum ſuam ad omnes figuras indefinitè quadrabiles extendere; quod demonſtratu eſt impoſſibile, cum unam è milleſimis non comprehendat; ut poſteà patebit. Dantur enim infinitæ figuræ indefinitæ quadrabiles, quæ nullo modo per iſtam Methodum ſunt Quadrabiles; & quarum exempla poſteà apponam; Et ut non modò errorem, ſed erroris fontem, detegam, neceſſe videtur breve illius Methodi compendium adjungere.

Adhibet æquationes Curvarum Generales, quarum unaquæque omnes Curvas ejuſdem gradus exprimere exiſtimat: Et talis Curvæ generalis, conſideratæ tanquam Quadratricis, quærit Quadrandam Generalem. Et oblatæ Quadrandæ ſpecialis æquationem comparat cum aliquâ ex formulis generalibus Quadrandaram naturam exprimentibus; unde deducit Quadratricem ſpecialem Quadrandæ ſpeciali convenientem; exemplo res erit manifeſta.

Sit ABC figura, rectis AC, CB & Curvâ AB comprehenſa; ſitq; ACDE = ABC, AGF = AGHL, & idem concipiatur ubique, proveniet hinc Curva aliqua AHD, quam Quadratricem appellat, quia illius ope Quadratur area ABC, jam æquationem aſſumit ad Quadratricem generalem AHD, & ex eâ deducit Quadrandam generalem ABC: ut ſi notentur abſciſſæ AG, AC per x, & ordinatæ Quadratricis CD, GH per y, & deniq; ordinatæ in Quadrandâ per z, ponitq; æquationem ad Quadratricem generalem in quâ ordinata x eſt duarum dimenſio-

mensionum hujusmodi, $\left.\begin{array}{r} by^2 + cay + ea^2 \\ + xy + fax \\ + gx \end{array}\right\} = 0$

ex quâ deducit æquationem ad Quadrandam generalem, in quâ ordinata z est etiàm duarum dimensionum,

$$\begin{array}{l} bz^2 + caz + ea^2 \\ + 2dxz + 2fax + \\ + 4gx^2 \end{array} \frac{d^2e + c^2g + f^2b - cdf - 4beg + a^2x^2}{\begin{array}{l} 4bea^2 + 4bfax + 4bgx^2 \\ - c^2a^2 - 2cdax - d^2x^2 \end{array}} = 0$$

Et similitèr pro reliquis Quadratricibus generalibus Quadrandas generales investigat. Proponatur jam Figura aliqua Quadranda specialis ABC, & exprimatur natura Curvæ AFB hac æquatione———— $Z^2 = \frac{aax - 12axx + 4x^3}{2a - x}$; hanc æquationem comparat cum æquatione generalis Quadrandæ jam positæ, (quia ordinata z in Quadrandâ speciali ad duas tantum dimensiones ascendit) nempe singulos hujus cum singulis illius terminis (ubi x eandem utrobiq; compositionem obtinet) eritque ex hâc comparatione $c, d, e = 0$, & $b = \frac{1}{2}$, $f = -1$ ac $g = \frac{1}{2}$; & hos valores substituit in æquatione ad Quadratricem suprà positam, in quâ ordinata x est duarum dimensionum, (quia hic ordinata z ad duas quoque dimensiones ascendit) eritque $\frac{y^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} = 0$, seu $y^2 = 2ax - x^2$, proprietas Quadratricis specialis AHD, in quâ AGF = AGHL; adeóq; habetur Figuræ propositæ Quadratura.

In eo tamen latet ratiocinationis & ipsius Methodi defectus, quod omnes Curvas in quibus z ad duas dimensiones (nec ultrà) ascendit, comparet cum unâ & eâdem

eâdem Quadrandâ generali, in quibus z non ultrà duas dimensiones ascendit; & quod concludat Figuram non esse indefinitè Quadrabilem, si hæc comparatio Quadratricem non determinet. Infinitæ enim sunt Quadrandæ generales (ex ipsius etiam Methodo deducibiles) in quibus z non ultrà duas dimensiones ascendit, & non nunquam æquatio Curvæ propositæ, cum primâ, secundâ, tertiâ, &c. comparata Quadratricem non habebit, & tamen comparatio cum Millesimâ quadratricem determinabit. Si enim ab æquatione tertiâ (quam posuit pro Quadratrice generali in quâ x esset trium dimensionum) primum terminum $by^3 + dxy^3$ auferat, ex reliquo Quadrandam generalem deducere potest, in quâ z non ultrà duas dimensiones ascendit, & quæ Quadratricem determinet, cum illâ quam ille statuit generalem non succedit: Et sic ex æquatione quartâ, quintâ (quas ille poneret pro Quadratricibus altiorum graduum) &c. ablatis iis terminis in quibus y ultrà duas dimensiones ascendit, ex reliquo haberi potest Quadrandæ generalis æquatio, quæ Quadratricem determinabit, cum nec ejus Quadranda, nec illa quam dixi esse deducibilem ex æquatione tertiâ, determinare potest, ita ut casu, non arte, incidimus in Quadrandam Generalem requisitam. Sed quia dixi istas æquationes ad Quadrandas generales ex ipsius Methodo esse deducibiles; volo hic paucis ostendere, Quomodo clariss. hic vir æquationes ad Quadrandas generales invenerit, vel saltèm facilè invenire potuisset.

G Ex

Fig. 20. Ex *Prob.* 22. conſtat, quomodo, datâ æquatione ad Curvam aliquam AHD, alia curva AFB ſit invenienda cujus area AGF æquatur rectangulo comprehenſo ſub ordinatâ GA & abſciſſâ AG; id eſt Quomodo, datâ Quadratrice, invenienda ſit Quadranda; adeóq; aſſumptâ æquatione ad Quadratricem generalem (qualem hic ſub initio aſcripſi) proveniet æquatio ad Quadrandam generalem. Jamq; exemplum unum aut alterum Figuræ hic aſcribam, in quâ Quadratrix ſecundum hanc Methodum eſt impoſſibilis, & tamen alio modo determinabilis. Sit

Fig. 20. Æquatio naturam curvæ AFB exprimens $z^2 = \frac{\overline{m^2 + x}}{p} \frac{+x^2}{2}$; in quâ x denotat abſciſſas AC, AG, & z ordinatas BC, GF, m & p quantitates datas & determinatas. Jam ſi Quadranda ſit Area AGF, comparanda eſt hæc æquatio cum æquatione ad Quadrandam generalem jam traditâ, quia in hâc propoſitâ æquatione z ad duas dimenſiones aſcendit; ſed manifeſtum eſt comparationem non ſuccedere (ut ipſe alibi argumentatur) ſi vel ſolus numerator fractionis utrobique exiſtens comparetur, deberet enim $m^2 + x^2$ coincidere cum $\overline{-d^2 e + ag + bf_2 - cdf - 4 beg + a^2}$, indeterminatum cum determinato, quod fieri nequit, itaq; figura hoc modo Quadratricem non habet, & tamen ipſa hæc figura eſt indefinite quadrabilis, ſcil. AGF $\doteq \sqrt{\frac{n^6 + 3n^4 x^2 + 3n^2 x^4 + x^6}{9pp}}$ Et non una tantum, ſed infinitæ poſſunt inveniri Figuræ indefinitè Quadrabiles, quarum

Quadra-

Quadratrices hoc modo ſunt impoſſibiles per *Prob.* 23.

Definiatur A H D hâc æquatione $x^9 = a^7y^2$; & *Fig.* 20. per *Prob.* 23. inveniatur curva A F B, cujus Area A G F æquêtur rectangulo contento ſub ordinatâ G H & datâ quâlibet rectâ, putà (a), & definietur A F B hâc æquatione $z^2 = \frac{81x^7}{4a^5}$; jámq; ſi Quadranda ſit area A G F ſecundùm hanc Methodum, comparanda eſt hæc æquatio cùm æquatione ad Quadrandam generalem jam traditâ, quia in propoſitâ æquatione z non ultrà duas dimenſiones aſcendit; ſed comparatio eſt impoſſibilis, quia in propoſitâ Curvâ x ad ſeptimam poteſtatem aſcendit; & in ejus æquatione ad Quadrandam generalem ultrà quartam aſcendere non poteſt; ſed terminus in quo x eſt ſeptimæ, non poteſt comparari cum termino in quo x eſt quartæ poteſtatis; nam, ſecundùm ipſius Regulam, comparatio eſt ſic inſtituenda ut x utrobiq; eandem obtineat compoſitionem; adeóq; Quadratrix hoc modo haberi non poteſt; & tamen Quadratricem habet A H D definita hac æquatione $x^9 = a^7y^2$, in quâ $GH + a = AGF$; id eſt $-\sqrt{\frac{x^9}{a^5}} = AGF$. Unde abunde conſtat hanc Methodum omnes Figuras indefinitè Quadrabiles non comprehendere; & infinitas poſſe inveniri quarum Areæ hoc modo non ſunt quadrabiles; aſſumatur enim quælibet æquatio in quâ z non ultrà duas, & x non infrà quatuor dimenſiones reperitur, & habetur æquatio naturam Curvæ exprimens cujus areæ per hanc Methodum non ſunt quadrabiles; ut in his exemplis $z^2 = \frac{x^8}{a^7}$,

$=\frac{x^9}{a^7}$, $z^2=\frac{x^{11}}{a^9}$, $z^2=\frac{x^{13}}{a^{11}}$, &c. quæ ſunt æquationes Curvarum naturas definientes quarum Areæ facilè determinantur & tamen nullo modo per hanc Methodum poſſunt inveniri. Sed nolo in hâc materiâ ulterius digredi, ſperans clariſſ. virum boni conſulturum quicquid dixerim; quia præcipua ratio quæ me impulit ut hæc ſcriberem, non alia eſſet, quam ut (errores ejus oſtendendo) illum extimulem ad publicanda illa, quibus Geometriam in immenſum ultrà terminos à Vietâ & Carteſio poſitos ſe promovere poſſe aſſeruit.

FINIS.

ERRATA.

PAg. 4. lin. 20. pro $\frac{n9}{2}$ lege $\frac{nry}{2}$; pag. 5. lin. 2. pro $\frac{nry}{a}$ lege $\frac{nry}{2}$. pag. 6. lin. 12. pro $\frac{3nry^3}{2a}$ lege $\frac{3nry^2}{2a}$, ibid. lin. 20. pro x lege x^2. pag. 14. lin. 11. pro $r\frac{y^2}{2r}$ lege $r-\frac{y^2}{2r}$ ibid. lin. 17. pro $m=3$ lege $m=\frac{2}{3}$. pag. 19. lin. 14. pro $d-y^3$. lege d^3-y^3 pag. 25. lin. 16. pro x lege x^2. pag. 28. lin. 3. pro $\sqrt{\frac{y^5}{16r^3}}$ lege $\sqrt{\frac{y^5}{64r^3}}$.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 12.

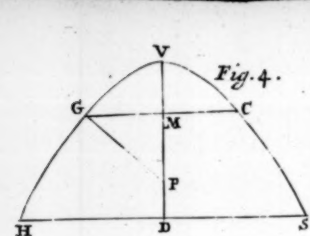
Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 18



V
Fig. 4.
G
C
M
P
H
D
S

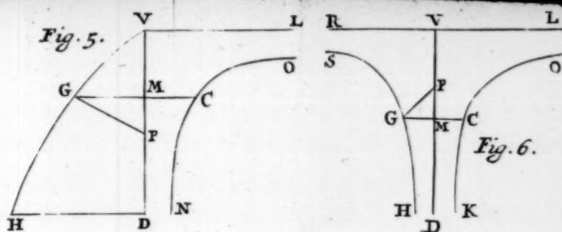


Fig. 5.
V
L
O
G
M
C
P
H
D
N
R
V
L
S
O
P
G
M
C
Fig. 6.
H
D
K

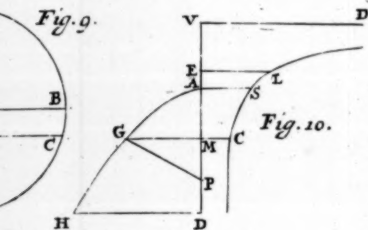
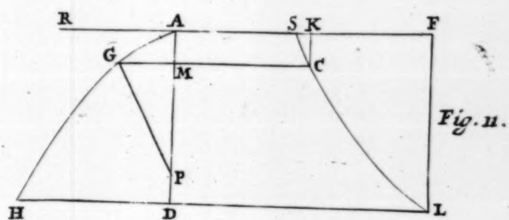


Fig. 9.
B
C
V
D
E
L
A
S
G
M
C
Fig. 10.
P
H
D



R
A
S
K
F
G
C
M
Fig. 11.
P
H
D
L

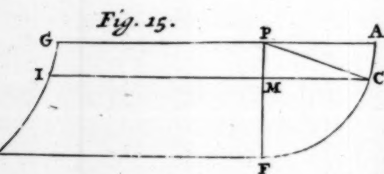
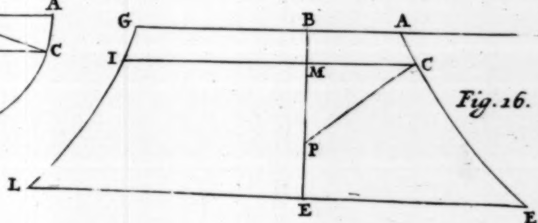


Fig. 15.
G
P
A
I
M
C
F



G
B
A
I
M
C
Fig. 16.
P
L
E
E

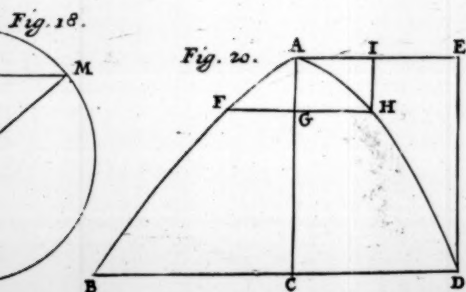
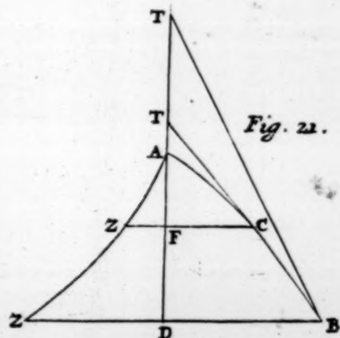


Fig. 18.
M
Fig. 20.
A
I
E
F
G
H
B
C
D



T
T
Fig. 21.
A
Z
F
C
Z
D
B